الفيزياء :

التمرين الأول :

1- إثبات المعادلة التفاضلية لنصف الدائرة :

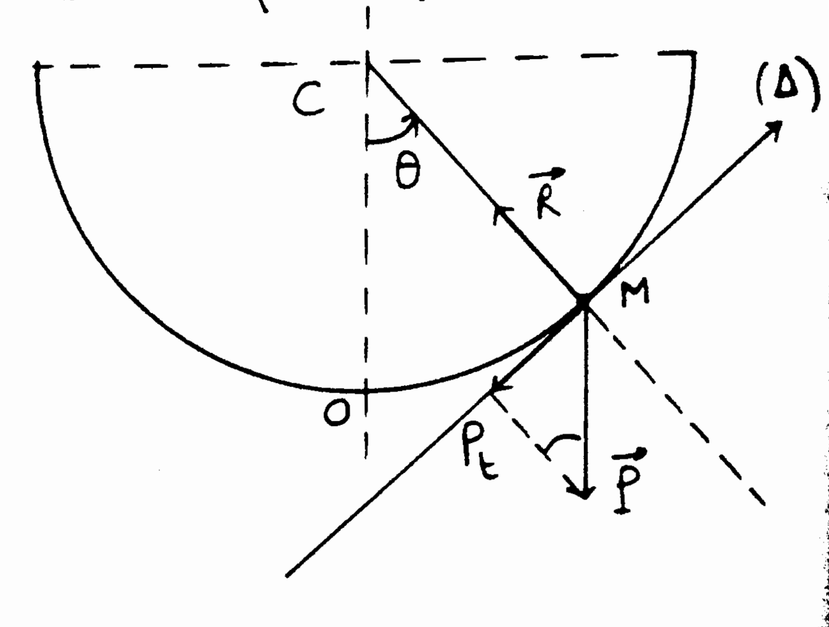
* المجموعة المدروسة : الجسم النقطي (S).
* القوى المطبقة : $\vec{P}$: وزن (S).

$\vec{R}$: تأثير السكة :

بما أن الاحتكاكات بين (S) والسكة مهملة فإن اتجاه $\vec{R}$ تمر دائما من المركز C لنصف الدائرة. نطبق على (S) العلاقة الأساسية للديناميك في معلم مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$ (1)

نعلم موضع (S) بالزاوية : $\theta=(\vec{CO},\vec{CM})$

ونسقط العلاقة (1) على المماس (Δ) للمسار في كل لحظة. (المنحى الموجب للمماس (Δ) مرتبط بالمنحى الموجب للزاوية θ). أنظر الشكل



$$-mg\sin\theta = ma_T$$

مع : $a_T = r\ddot{\theta}$

نكتب : $-g\sin\theta = r\ddot{\theta}$

ومنه : $\ddot{\theta} + \frac{g}{r}.\theta.\sin\theta$

حركة النقطة (S) حركة دائرية تذبذبية غير جيبية.

2/1.2- طبيعة حركة (S) في حالة التذبذبات الصغيرة :

في حالة θ صغيرة، يكون $\sin\theta\approx\theta_{rad}$، وتكتب المعادلة التفاضلية إذن على الشكل :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{r}.\theta=0$$

إذن، فحركة (S) حركة دائرية جيبية نبضها :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{r}}$$

2.2- حساب ω_0 :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{r}} \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{10}{1}}\approx\pi\ rad/s$$

3.2- المعادلة الزمنية لحركة (S) فوق السكة :

تقبل المعادلة التفاضلية $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$

الحل : $\theta(t)=\theta_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$

مع : $\theta_m=0,2\,rad$ و $\omega_0=\pi\,rad/s$

لنحدد الطور φ عند أصل التواريخ :

لدينا عند اللحظة $t=0$: $\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m}$

وحسب المبيان (شكل 2)، لدينا: $\theta(t=0)=0,1\,rad$

إذن: $\cos\varphi = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$

وبالتالي، فإن هناك حلين: $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$

لاختيار الحل الملائم نحسب السرعة الزاوية:

$$\dot\theta = -\omega_0\theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

عند $t=0$، نكون: $\dot\theta_0 = \dot\theta(t=0) = -\omega\theta_m\sin\varphi$

وبما أن الزاوية θ تتزايد ابتداء من اللحظة $t=0$، فإن السرعة الزاوية موجبة: $\dot\theta_0 > 0$

أي أن: $-\omega_0\theta_m\sin\varphi > 0$

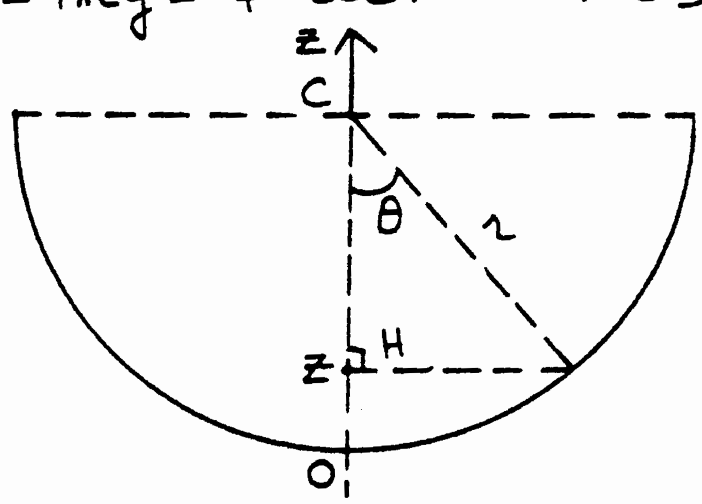
وبما أن: $-\omega_0\theta_m < 0$، فإن $\sin\varphi < 0$

ومنه: $\varphi = -\frac{\pi}{3}$، وبالتالي:

$$\theta(t) = 0,2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

4.2 - تعبير طاقة الوضع الثقالية E_p

بصفة عامة يعبر عن طاقة الوضع الثقالية في مجال الثقالة الثابت $\vec g$ بالعلاقة: $E_p = mgz + cte.$



$$z = CO - CH = r - r\cos\theta$$

إذن: $z = r(1-\cos\theta)$

وبما أن θ صغيرة، فإنه يمكن اعتبار: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ مع : $\theta(rad)$

إذن: $z = \frac{r\theta^2}{2}$

وبالتالي: $E_p = mg\cdot\frac{r\theta^2}{2} + cte$

لدينا عند: $\theta = 0$ ، $E_p = 0$، إذن: $cte = 0$

وبالتالي: $E_p = \frac{1}{2}mgr.\theta^2$

5.2 - تعبير الطاقة الميكانيكية E_m:

لدينا: $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mgr.\theta^2$$

وبما أنه في كل لحظة، نكون: $v = r.\dot\theta$

فإن: $E_m = \frac{1}{2}mr^2.\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mgr\theta^2 \quad (2)$

ملحوظة:

يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية باشتقاق العلاقة (2) بالنسبة للزمن في حالة اعتبار الطاقة الميكانيكية ثابتة:

$$\frac{dE_m}{dt} = mr^2\dot\theta\ddot\theta + mgr\theta\dot\theta$$

ومنه: $r\ddot\theta + g\theta = 0$

$$\ddot\theta + \frac{g}{r}\theta = 0$$

6.2 - قيمة E_c عند الموضع M_1:

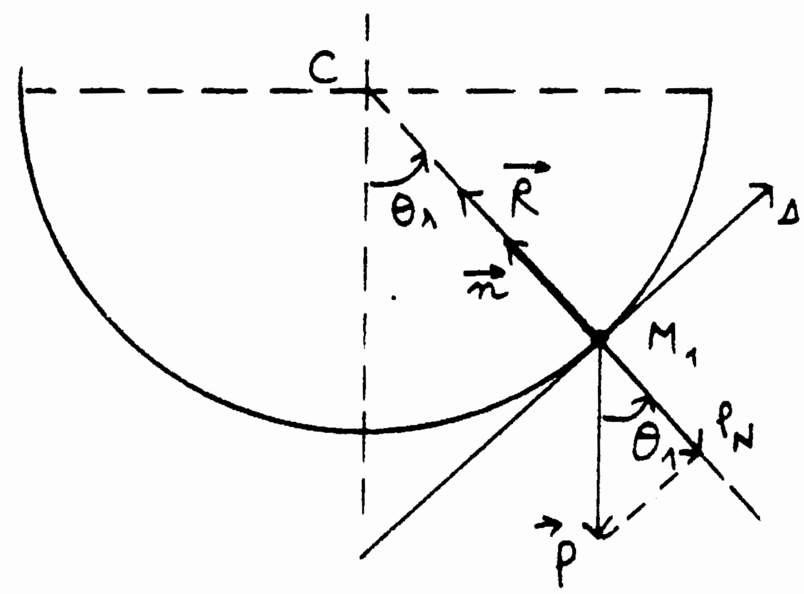
مبيانيا حسب الشكل -3- عند $z_1 = 1,5\,cm$

نجد: $E_{p_1} = 15.10^{-5}J$ ، ولدينا $E_m = 20.10^{-5}J$

ومنه: $E_{c_1} = E_m - E_{p_1}$

$$E_{c_1} = 5.10^{-5}J$$

7.2 - قيمة شدة $\vec{R}_1$ عند M_1 :



نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على S ثم نسقطها على المحور $\vec{n}$ لأساس فريني:

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

الإسقاط على $\vec{n}$: $-mg\cos\theta_1 + R_1 = m a_N$

$$R_1 = m\frac{v_1^2}{r} + mg\cos\theta_1$$

مع: $E_{c_1} = \frac{1}{2} m v_1^2$

$$\Longrightarrow m v_1^2 = 2E_{c_1}$$

$$z_1 = r(1-\cos\theta_1) \Longrightarrow \cos\theta_1 = 1 - \frac{z_1}{r}$$

إذن: $R_1 = \frac{2E_{c_1}}{r} + mg\left(1 - \frac{z_1}{r}\right)$

ت.ع: $R_1 = 9,95.10^{-3} N$

التمرين الثاني

1.1 - تحديد المقادير U_m و U_{Rm} و φ مبيانيا:

حسب معطيات المبيان:

كل تجزئة رأسية توافق 1V .

وكل تجزئة أفقية توافق $10^{-3}s$.

إذن: $U_m = 7\times 1 = 7V$

$$U_{Rm} = 5\times 1 = 5V$$

نحسب القيمة المطلقة للطور φ بالعلاقة:

$$|\varphi| = \frac{2\pi\tau}{T}$$

مع: $\tau = 2.10^{-3}s$ و $T = 20\times 10^{-3}s$

نحصل على: $|\varphi| = \frac{2\pi.2.10^{-3}}{20.10^{-3}} = \frac{\pi}{5} rad$

حسب الرسم التذبذبي، التوتر $u_R(t)$ متقدم في الطور بالنسبة لـ $u(t)$.

إذن، فالدارة كثافية، وباعتبار: $i = I_m\cos 2\pi N t$ ، فإن: $\varphi = -\frac{\pi}{5} rad$

2.1 - تعبير $u(t)$:

لدينا: $u(t) = U_m\cos(2\pi N.t + \varphi)$

$$u(t) = 7\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{5}\right)$$

مع: $N = \frac{1}{T} = 50Hz$

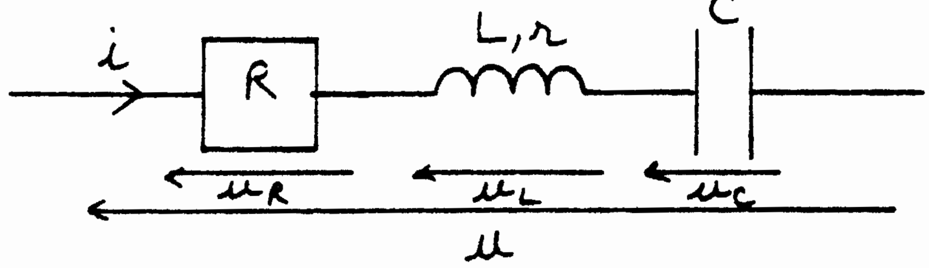
3.1 - حساب ممانعة الدارة Z :

تساوي ممانعة الدارة النسبة: $Z = \frac{U_m}{I_m}$

مع: $I_m = \frac{U_{Rm}}{R}$ ، نحصل على:

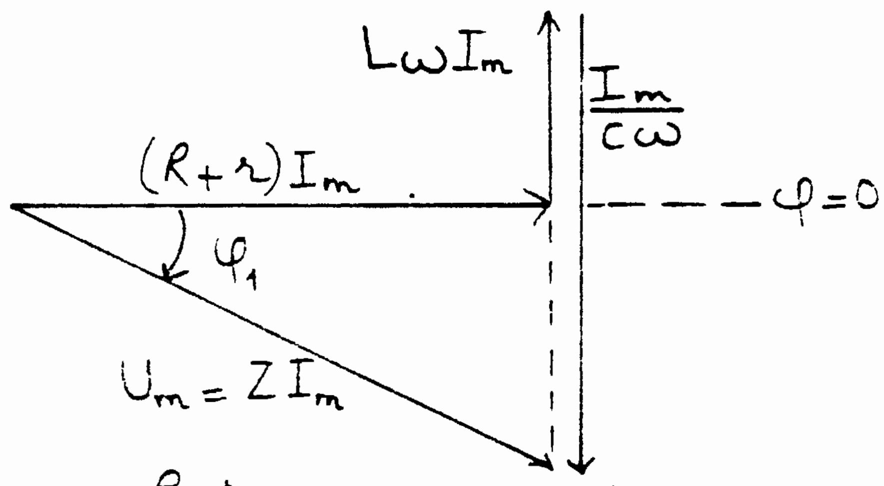
$$Z = \frac{U_m}{U_{Rm}}.R \Rightarrow Z = \frac{7}{5}.88,3 = 123,6\Omega .$$

4.1 - حساب مقاومة الوشيعة : r



بما أن الدارة كثافية أي أن التوتر u_R متقدم في الطور على التوتر u ، فإن إنشاء فرنيل

يكون كالتالي:



حسب إنشاء فرنيل: $\cos\varphi_1 = \frac{R+r}{Z}$

$$Z\cos\varphi_1 = R+r$$

ومنه: $r = Z\cos\varphi - R$

$$r = 123,6\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) - 88,3$$

$$r = 11,7\ \Omega .$$

1.2 ـ حساب معامل التحريض L وشدة التيار I_0 عند الرنين:

عندما يكون $u(t)$ و $u_R(t)$ على توافق في الطور تكون الدارة في حالة رنين شدة التيار وفي هذه الحالة تتحقق العلاقة:

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 N_0^2 C}$$

$$L = 0,27\ H$$

عند الرنين يتصرف ثنائي القطب RLC كموصل أومي مقاومته تساوي المقاومة الكلية للدارة. إذن، عند الرنين:

$U = Z_0 I_0 = (R+r)I_0$ مع $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

ومنه: $I_0 = \frac{U}{R+r} = \frac{U_m}{(R+r)\sqrt{2}}$

$$I_0 = \frac{7}{(88,3+11,7)\sqrt{2}} = 5.10^{-2}\ A .$$

2.2 ـ تعبير معامل الجودة Q للدارة:

بصفة عامة يعبر عن معامل الجودة بالعلاقة

$$Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$$

حيث U_{Cm} و U_m التوترات عند الرنين:

$U_{Cm} = Z_C I_m = \frac{I_m}{C\omega_0} = L\omega_0 I_m$ لأنه عند الرنين: $\frac{1}{C\omega_0} = L\omega_0$.

و $U_m = ZI_m = (R+r)I_m$ لأنه عند الرنين: $Z = Z_0 = R+r$.

ومنه: $Q = \frac{L\omega_0 I_m}{U_m} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R+r}$

أو: $Q = \frac{2\pi N_0 L}{R+r}$

ت ع: $Q = \frac{2\pi.50.0,27}{88,3+11,7} = 1,16$

3 ـ تعبير $\tan\varphi$ بدلالة Q و $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

حسب إنشاء فرنيل السابق، لدينا:

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} = \frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega(R+r)}$$

وبما أن: $LC\omega_0^2 = 1$، حيث ω_0 النبض الخاص، فإن:

$$\tan\varphi = \frac{LC\omega^2 - LC\omega_0^2}{C\omega(R+r)}$$

أو: $\tan\varphi = \frac{L}{R+r}\cdot\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)$

بوضع: $x = \frac{\omega}{\omega_0}$، أي: $\omega = x\omega_0$

نحصل على: $\tan\varphi = \frac{L}{R+r}\left(\frac{x^2.\omega_0 - \omega_0}{x}\right)$

أو: $\tan\varphi = \frac{L\omega_0}{R+r}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

وبالتالي: $\tan\varphi = Q\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

في حالة $x=0{,}735$ ، لدينا $\tan\varphi<0$

إذن في هذه الحالة يكون التأثير الكثافي أقوى من التأثير الحثي.

التمرين الثالث:

1- منحى المجال الكهرساكن $\vec{E}$:

حسب الشكل -2- ، يتم انحراف الإلكترونات نحو الصفيحة (P_1) ، إذن منحى القوة الكهربائية المطبقة على الإلكترونات $(\vec{F}=q\vec{E})$ نحو الصفيحة (P_1) ، وبما أن $q<0$ ، فإن منحى $\vec{E}$ نحو الصفيحة (P_2) أي نحو الجهود التناقصية

2- طبيعة المسار:

*الشروط البدئية للحركة: عند $t=0$ ، لدينا:

$$\vec{OM_0}\left|\begin{array}{l} x_0=0 \\ y_0=0 \end{array}\right. \quad \text{و} \quad \vec{V_0}\left|\begin{array}{l} v_{0x}=V_0 \\ v_{0y}=0 \end{array}\right.$$

و

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x=0 \\ E_y=-E \end{array}\right.$$

تخضع كل إلكترون أثناء حركته داخل المجال الكهرساكن المنتظم إلى:

$\vec{F}$: القوة الكهربائية

$\vec{P}$: وزنه.

نهمل $\vec{P}$ أمام $\vec{F}$ ونطبق على الإلكترون العلاقة الأساسية للديناميك بالنسبة لمعلم مرتبط بالأرض نعتبره معلما غاليليا:

$$m\vec{a}=q\vec{E}$$

$$\vec{a}=\frac{q}{m}.\vec{E}=\vec{cte}$$

*إحداثيات التسارع $\vec{a}$ في كل لحظة هي:

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x=\frac{q}{m}.E_x=0 \\ a_y=\frac{q}{m}.E_y=\frac{-qE}{m}=cte \end{array}\right.$$

إذن، حركة الإلكترون وفق المحور Ox حركة منتظمة معادلتها الزمنية:

$$x=V_0.t$$

وحركته وفق المحور Oy حركة متغيرة بانتظام، معادلتها الزمنية: $y=-\frac{qE}{2.m}.t^2$

وبما أن: $q=-e$ ، فإن: $y=+\frac{1}{2}\frac{eE}{m}.t^2$

ومن المعادلة $x=v_0.t$ ، لدينا: $t=\frac{x}{v_0}$

للحصول على معادلة المسار، نعبر عن y بدلالة x ، وذلك بتعويض الزمن بتعبيره $\frac{x}{v_0}$:

$$y=\frac{1}{2}.\frac{eE}{m.v_0^2}.x^2$$

أو: $y=A.x^2$ ، مع: $A>0$

إذن مسار الإلكترون، مسار شلجمي انحناؤه نحو $y>0$.

3- تعبير النسبة $\frac{e}{m}$:

حسب الشكل -2- إحداثيتا النقطة M هما: $x=\ell$ و $y=\ell$

نعوض x و y بالقيمة l في معادلة المسار، فنحصل على: $l = \frac{1}{2}\cdot\frac{eE}{mv_0^2}\cdot l^2$

أي أن: $$\frac{e}{m} = \frac{2v_0^2}{El}$$

الكيمياء:

1.1 - حساب تركيز الأنواع الكيميائية:

الأنواع الكيميائية المتواجدة في محلول حمض الإيثانويك هي:

CH_3COOH و CH_3COO^- و OH^- و H_3O^+

$[H_3O^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H_3O^+] \approx 4.10^{-4}\, mol.l^{-1}$

$[OH^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} \Rightarrow [OH^-] \approx 2,5.10^{-11}\, mol/l$

* حسب معادلة الحياد الكهربائي:

$[H_3O^+] = [OH^-] + [CH_3COO^-]$

وبما أن المحلول حمضي: $[H_3O^+] \gg [OH^-]$

وعليه، فإن: $[CH_3COO^-] = [H_3O^+]$

$= 4.10^{-4}\, mol.l^{-1}$

* حسب معادلة انحفاظ المادة:

$C_1 = [CH_3COOH] + [CH_3COO^-]$.

إذن: $[CH_3COOH] = C_1 - [CH_3COO^-]$

$[CH_3COOH] = 9,6.10^{-3}\, mol.l^{-1}$.

2.1 - قيمة الثابتة K_A:

يُعبّر عن الثابتة K_A للمزدوجة (CH_3COOH/CH_3COO^-) بالعلاقة:

$$K_A = \frac{[CH_3COO^-][H_3O^+]}{[CH_3COOH]}$$

ت.ع: $K_A = 1,67.10^{-5}$

3.1 - حساب α_1 مُعامل التفكك

يعبر عن معامل التفكك α لحمض AH تركيزه C_1 بالعلاقة: $\alpha = \frac{[A^-]}{C_A} = \frac{[H_3O^+]}{C_A}$

وعليه، يكتب α_1 لحمض الإيثانويك:

$\alpha_1 = \frac{[CH_3COO^-]}{C_1} = \frac{[CH_3O^+]}{C_1}$

$\alpha_1 = 4.10^{-2} = 4\%$

1.2 - إثبات أن $pH = pK_A$:

لدينا: $\alpha_2 = \frac{[CH_3COO^-]}{C_2} = 0,5$

ومنه: $[CH_3COO^-] = 0,5\, C_2$

* حسب معادلة انحفاظ المادة:

$C_2 = [CH_3COOH] + [CH_3COO^-]$

إذن: $[CH_3COOH] = C_2 - [CH_3COO^-]$

أو: $[CH_3COOH] = C_2 - 0,5C_2$

أي: $[CH_3COOH] = 0,5C_2$

ونعلم أن: $pH = pK_A + \log\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}$

$pH = pK_A + \log\frac{0,5C_2}{0,5C_2}$

إذن: $pH = pK_A$

2.2 - حساب C_2:

بما أن المحلول حمضي، فإن $[OH^-]$ مهمل بالمقارنة مع $[H_3O^+]$، وعليه، يكون:

$\alpha_2 = \frac{[H_3O^+]}{C_2}$: وبالتالي ، $[CH_3COO^-]=[H_3O^+]$

$$C_2 = \frac{[H_3O^+]}{\alpha_2} = \frac{10^{-pH}}{\alpha_2}$$

$$C_2 = \frac{10^{-4,8}}{0,5} \approx 3,2.10^{-5}\ mol.\ell^{-1}$$

3.2 - حساب V حجم الماء المضاف:

خلال عملية التخفيف، تبقى كمية مادة الحمض CH_3COOH ثابتة :

$$n_1(CH_3COOH) = n_2(CH_3COOH)$$

$$C_1.V_1 = C_2(V_1+V)$$

ومنه ، $V = \frac{C_1.V_1}{C_2} - V_1$

$$\Rightarrow V \approx 1,25\ell.$$

3.1 ـ المعادلة الحصيلة خلال المعايرة :

لدينا معايرة حمض ضعيف CH_3COOH بقاعدة قوية (Na^+, OH^-) :

$$CH_3COOH + OH^- \longrightarrow CH_3COO^- + H_2O$$

3.2 ـ إثبات العلاقة :

بما أن الحمض ضعيف (المحلول S_1) حيث تفككه لا يتجاوز $\alpha_1=4\%$، فإننا سوف نهمل كمية مادة (CH_3COO^-) الموجودة في S_1 مقارنة مع كمية مادة CH_3COOH.

* من خلال علاقة التكافؤ ، نستنتج أن : $C_1.V_A = C_B.V_e$ ، ومن جهة أخرى لدينا :

$$CH_3COOH + OH^- \longrightarrow CH_3COO^- + H_2O$$

كميات المادة قبل المعايرة	$C_1.V_A$	0		0	متواجد بوفرة
عند إضافة الحجم V	$C_1V_A - C_B.V$	0		$C_B.V$	
عند التكافؤ	$C_1V_A - C_BV_e = 0$	0		$C_B.V_e$	

$[CH_3COOH] = \frac{C_1.V_A - C_B.V}{V_T}$ ، مع $pH = pK_A + \log\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}$

و : $[CH_3COO^-] = \frac{C_B.V}{V_T}$

وحسب علاقة التكافؤ ، نجد :

$$[CH_3COOH] = \frac{C_B.V_e - C_B.V}{V_T}$$

ومنه :

$$pH = pK_A + \log\frac{\frac{C_B.V}{V_T}}{\frac{C_B(V_e-V)}{V_T}}$$

$$\Rightarrow pH = pK_A + \log\frac{V}{V_e-V}$$

3.3 - أ - حساب V_e :

$$pH = pK_A + \log\frac{V}{V_e-V}$$

إذن : $\log\frac{V}{V_e-V} = pH - pK_A$.

ومنه : $\frac{V}{V_e-V} = 10^{pH-pK_A}$

إذن : $V = V_e.10^{pH-pK_A} - V.10^{pH-pK_A}$

وبالتالي : $V_e = \frac{V(1+10^{pH-pK_A})}{10^{pH-pK_A}}$

ت ع : $V_e = 20\ ml.$

ب - حساب C_B :

حسب علاقة التكافؤ ، لدينا : $C_1V_A = C_B.V_e$

إذن : $C_B = \frac{C_1V_A}{V_e} \Rightarrow C_B \approx 10^{-2} mol.\ell^{-1}$